Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Wenn zwei Vektoren linear abhängig sind, bedeutet dies, dass sie parallel zueinander liegen. In Formeln ausgedrückt sind zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ genau dann **linear abhängig**, wenn ein Skalar $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\boxed{a \cdot \vec{u} = \vec{v}}$$

Gibt es keine solche Zahl, so heißen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ **linear unabhängig**.

Rechnerische Überprüfung

Du kannst zwei Vektoren auf lineare Unabhängigkeit prüfen, indem du aus der oberen Gleichung ein lineares Gleichungssystem aufstellst, in dem nur die Unbekannte a vorkommt. Ist dieses lösbar, so sind die beiden Vektoren linear abhängig, ansonsten linear unabhängig.

Beispiel

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es gilt $-2 \cdot \vec{u} = \vec{v}$, aber:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn:

Wären sie linear abhängig, gäbe es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ gilt.

Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 1 \cdot a & = & 2 \\ \text{II} & 2 \cdot a & = & 5 \\ \text{III} & 3 \cdot a & = & -6 \end{array}$$

Aus I ergibt sich $a = 2$, setzt man dies aber widerum in II ein, erhält man $2 \cdot 2 = 5$, was falsch ist. Daher sind beide Vektoren linear unabhängig und nicht parallel.